

Digitalna obrada signala
Prozorske funkcije

Slika 4.5 Amplitudska karakteristika DFT za slučaj $N = 8, k = 3$.

Da bi se popravile frekvencijske karakteristike DFT, odbirci ulaznog signala se mogu pomnožiti odbircima *težinske* ili *prozorske funkcije* $w[n]$. Dakle, modifikovana ulazna funkcija postaje:

$$y[n] = w[n]x[n]$$

a njena diskretna Furijeova transformacija:

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]x[n]W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W[n]X[k-n]$$

Digitalna obrada signala
Prozorske funkcije – Pravougaona

Pravougaona prozorska funkcija definisana je na sledeći način:

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

Slika 4.6 (a) Pravougaona prozorska funkcija, $N = 32$, (b) amplitudska karakteristika.

Digitalna obrada signala

Prozorske funkcije – Pravougaona

$$W_R(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(\Omega N / 2)}{\sin(\Omega / 2)} e^{-j\Omega(N-1)/2}$$

Na slici 4.6b prikazana je amplitudska karakteristika pravougaone prozorske funkcije. Širina glavnog luka u spektru pravougaone prozorske funkcije je $4\pi/N$. Osnovni nedostatak pravougaone prozorske funkcije je malo slabljenje bočnih lukova u amplitudskom spektru. Amplituda prvog bočnog luka iznosi 22% (-13 dB) od amplitude glavnog luka. Takođe, viši bočni lukovi opadaju sa nagibom od -6 dB/oktavi. Kada se formira konvolucija u spektralnom domenu između spektra $W_p(e^{j\Omega})$ i spektra ulaznog signala, zbog postojanja jakih bočnih lukova nastaje značajna modifikacija spektra ulaznog signala, tj. $Y[k] \neq X[k]$. Zbog ovakvih karakteristika pravougaone prozorske funkcije, direktna primena DFT na ulazni signal onemogućava detekciju slabih signala u prisustvu jačih signala.

Velika amplituda bočnih lukova u spektru pravougaone prozorske funkcije je posledica naglog prekida sekvence $w_R[n]$. Poznato je da sekvence koje imaju manje bočne lukove u spektru nemaju diskontinuitete u vremenskom domenu. U spektralnoj analizi, projektovanju FIR sistema, teoriji antenskih sistema kao i u mnogim drugim oblastima tehnike definisane su brojne prozorske funkcije, od kojih će neke biti opisane u narednom izlaganju. Sve dobre prozorske funkcije imaju postepen prelaz od centra prozorske funkcije prema krajevima.

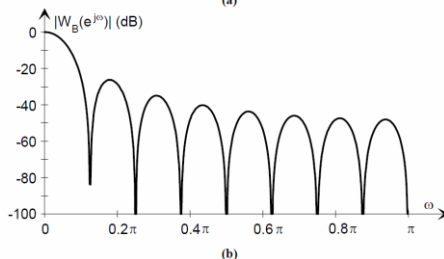
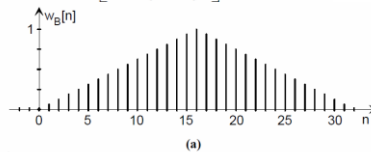
Digitalna obrada signala

Prozorske funkcije – Trougaona ili Bartletova

Trougaona ili Bartletova (Bartlett) prozorska funkcija opisana je relacijom:

$$w_T[n] = \begin{cases} 2n/N & n = 0, 1, \dots, N/2 \\ w_T[N-n], & n = (N/2) + 1, (N/2) + 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$W_T(e^{j\Omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\Omega N / 4)}{\sin(\Omega / 2)} \right]^2 e^{-j\Omega(N/2-1)}$$



Slika 4.7 (a) Trougaona prozorska funkcija, $N = 32$, (b) amplitudska karakteristika.

Digitalna obrada signala
Prozorske funkcije – Hanova

Da bi se još više smanjili bočni lukovi *potrebno je napraviti još blaži prelaz u blizini krajeva prozorske funkcije*. To se može postići korišćenjem kosinusnih (sinusnih) funkcija oblika $\cos^\alpha x$ ili $\sin^\alpha x$. Razlike između prozorskih funkcija kosinusnog i sinusnog tipa su u vremenskom pomeraju za polovinu dužine sekvence i u tome što je kosinusna funkcija simetrična u odnosu na koordinatni početak. Prema tome, za primenu u spektralnoj analizi pomoću DFT pogodniji je sinusni oblik funkcije:

$$w[n] = \sin^\alpha \left(\frac{n\pi}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

gde slobodni parametar ima vrednost $1 \leq \alpha \leq 4$.

Tako se za $\alpha = 1$ dobija sinusna prozorska funkcija:

$$w_C[n] = \sin \left(\frac{n\pi}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Digitalna obrada signala
Prozorske funkcije – Hanova

$$w_H[n] = \sin^2 \left(\frac{n\pi}{N} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi}{N} \right) \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W_H(e^{j\Omega}) = 0.5W_R(e^{j\Omega}) - 0.25[W_R(e^{j(\Omega-2\pi/N)}) + W_R(e^{j(\Omega+2\pi/N)})]$$

gde je $W_R(e^{j\Omega})$ spektar pravougaone prozorske funkcija

Slika 4.8 (a) Hanova prozorska funkcija, $N = 32$, (b) amplitudska karakteristika.

Digitalna obrada signala

Prozorske funkcije – Hanova

$$W_H(e^{j\Omega}) = 0.5W_R(e^{j\Omega}) - 0.25[W_R(e^{j(\Omega-2\pi/N)}) + W_R(e^{j(\Omega+2\pi/N)})]$$

spektar Hanove prozorske funkcije predstavlja superpoziciju spektra pravougaonog prozora pomnoženog sa faktorom 0.5, i spektara pravougaonih prozora pomerenih za $\pm 2\pi/N$ i pomnoženih sa -0.25. Interesantno je da se maksimumi pomerenih spektara nalaze na mestima gde centralni spektar ima nule. Ovakvo sumiranje tri spektra ima za cilj da smanji amplitudu prvog bočnog luka. Međutim, ova spektralna interpretacija ima i vrlo važnu praktičnu primenu. Naime, kada se određuje DFT, iz spektra $W_H(e^{j\Omega})$ se uzimaju odbirci sa frekvencijskim razmakom $2\pi/N$, odnosno, tačno na mestima gde se nalaze nule spektra $W_R(e^{j\Omega})$. Dakle, u rezultatnom spektru $W_H(e^{j\Omega})$ postoje samo tri nenulta odbirka na pozicijama $-2\pi/N$, 0 i $2\pi/N$, odnosno, na mestima gde leže centralni odbirci tri spektra koji ulaze u superpoziciju. Direktna primena uočene pojave omogućava da se množenje u vremenskom domenu sa Hanovom prozorskom funkcijom zameni superpozicijom spektara u frekvencijskom domenu. Dakle, spektar signala ograničenog Hanovom prozorskom funkcijom $Y[k]$ dobija se ako se nađe spektar signala bez množenja sa prozorskom funkcijom $X[k]$ i primeni formula:

$$Y[k] = \frac{1}{2} \left\{ X[k] - \frac{1}{2} (X[k-1] + X[k+1]) \right\}$$

Digitalna obrada signala

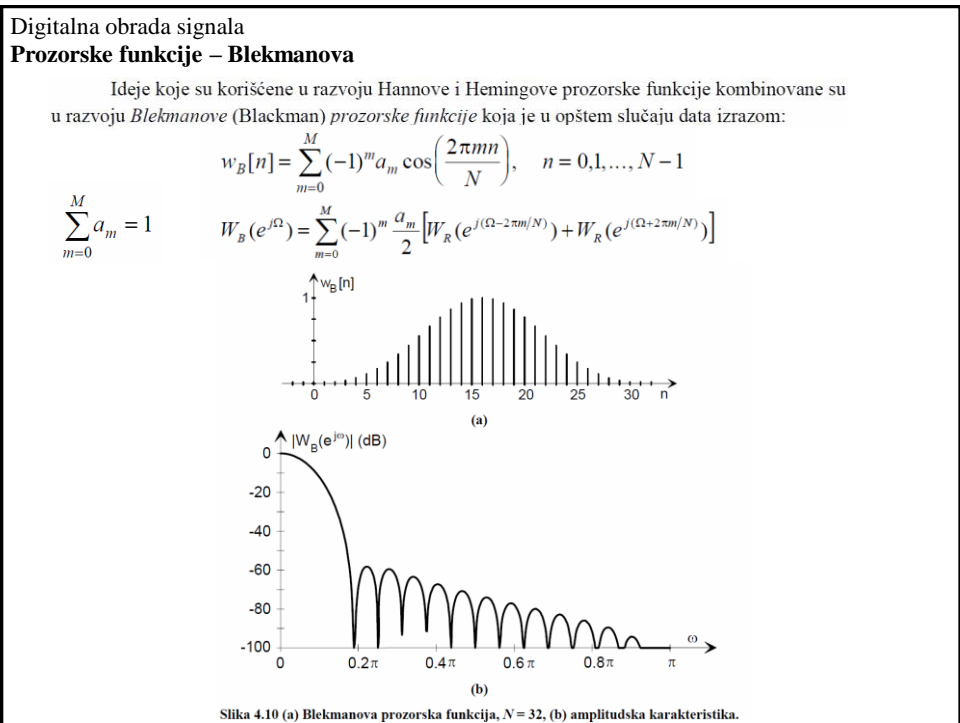
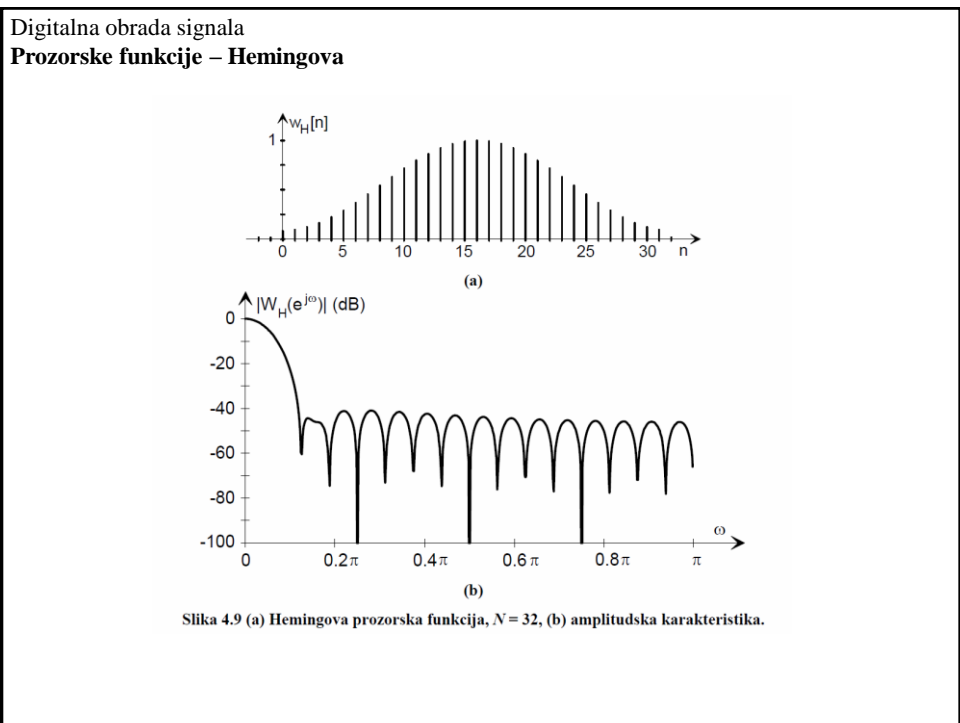
Prozorske funkcije – Hemingova

Hemingova (Hamming) prozorska funkcija predstavlja poboljšanu verziju Hanove prozorske funkcije. Osnovni cilj poboljšanja je dalje smanjenje bočnih lukova. Ako se generalizovani oblik Hanove prozorske funkcije i njen spektar napišu u obliku:

$$w_H[n] = \alpha_H - (1 - \alpha_H) \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W_H(e^{j\Omega}) = \alpha_H W_R(e^{j\Omega}) - 0.5(1 - \alpha_H) \{W_R[e^{j(\Omega-2\pi/N)}] + W_R[e^{j(\Omega+2\pi/N)}]\}$$

Iako se može izračunavanjem utvrditi da se prvi bočni luk može potpuno eliminisati ako je $\alpha_H = 25/46 = 0.543478261 \approx 0.54$. Za ovu vrednost parametra α_H generalizovana prozorska funkcija naziva se Hemingova prozorska funkcija. Maksimalna amplituda bočnih lukova sada iznosi -43 dB. Zbog toga što kod Hemingove prozorske funkcije postoji mali diskontinuitet na krajevima (0.08), bočni lukovi opadaju sa nagibom od samo -6 dB/oktavi. Širina centralnog luka praktično je ista kao kod Hanove prozorske funkcije.

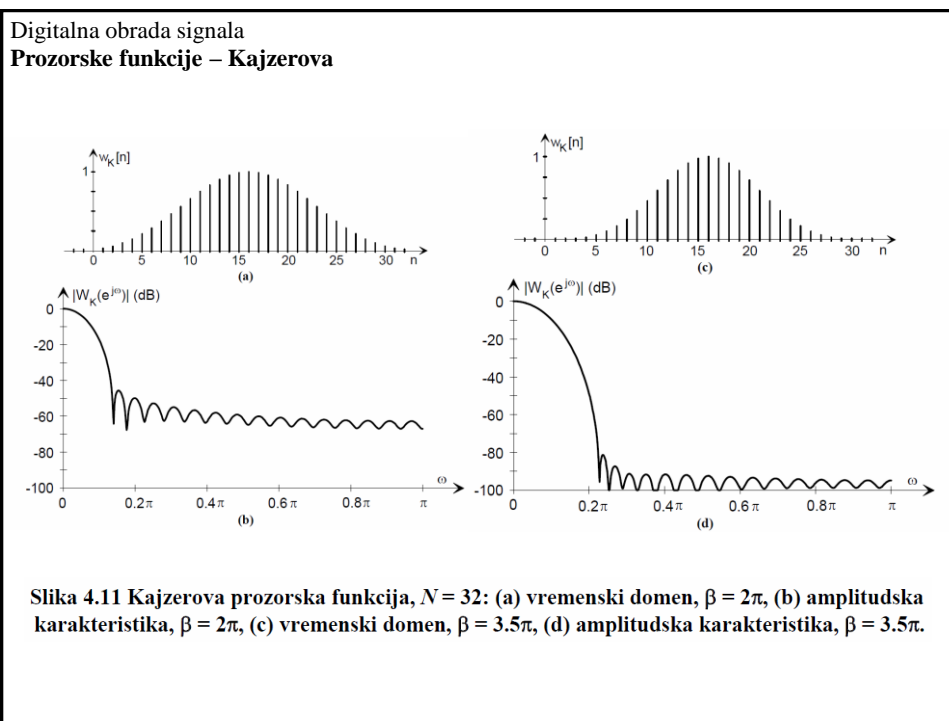


Digitalna obrada signala
Prozorske funkcije – Kajzerova
 ograničenog trajanja T_K koja maksimizira energiju sadržanu u opsegu učestanosti B_K

$$w_K[n] = \frac{I_0\left\{\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2}\right\}}{I_0(\beta)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$$

$$\beta = 0.5T_K B_K$$

$$W_K(e^{j\Omega}) \approx \begin{cases} \frac{N-1}{I_0(\beta)} \frac{\sinh\left\{\sqrt{\beta^2 - [(N-1)\Omega/2]^2}\right\}}{\sqrt{\beta^2 - [(N-1)\Omega/2]^2}} e^{-j\Omega(N-1)/2} & |\Omega| \leq \frac{2\beta}{N-1} \\ \frac{N-1}{I_0(\beta)} \frac{\sin\left\{\sqrt{[(N-1)\Omega/2]^2 - \beta^2}\right\}}{\sqrt{[(N-1)\Omega/2]^2 - \beta^2}} e^{-j\Omega(N-1)/2} & |\Omega| > \frac{2\beta}{N-1} \end{cases}$$


Digitalna obrada signala

Prozorske funkcije – Kajzerova

U praktičnoj primeni Kajzerove prozorske funkcije u spektralnoj analizi signala potrebno je, na osnovu zadatih zahteva za slabljenje bočnih lukova A_{sl} (od čega zavisi curenje spektra) i širine glavnog luka $\Delta\Omega_0$ (od čega zavisi sposobnost razdvajanja po frekvenciji), odrediti vrednosti karakterističnih parametara prozorske funkcije, β i N . Parametar β se određuje na osnovu empirijske formule [K-4]:

$$\beta = \begin{cases} 0 & A_{sl} \leq 13.26 \text{ dB} \\ 0.76609(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26) & 13.26 \text{ dB} < A_{sl} \leq 60 \text{ dB} \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3) & 60 \text{ dB} < A_{sl} \leq 120 \text{ dB} \end{cases}$$

Optimalna vrednost N se takođe može proceniti iz empirijske formule [K-4]:

$$N \approx \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta\Omega_0} + 1$$

Digitalna obrada signala

Prozorske funkcije – Dolf Čebiševljeva

Problem određivanja optimalne prozorske funkcije može se matematički postaviti i na drugačiji način kao optimizacioni *problem određivanja prozorske funkcije čiji centralni luk ima minimalnu širinu za zadato slabljenje bočnih lukova*. Ovaj problem je poznat iz teorije antenskih nizova i njegovo rešenje u kontinualnom slučaju zahteva korišćenje Dirakovih impulsa. U slučaju diskretnih sistema postoji egzaktno rešenje u spektralnom domenu.

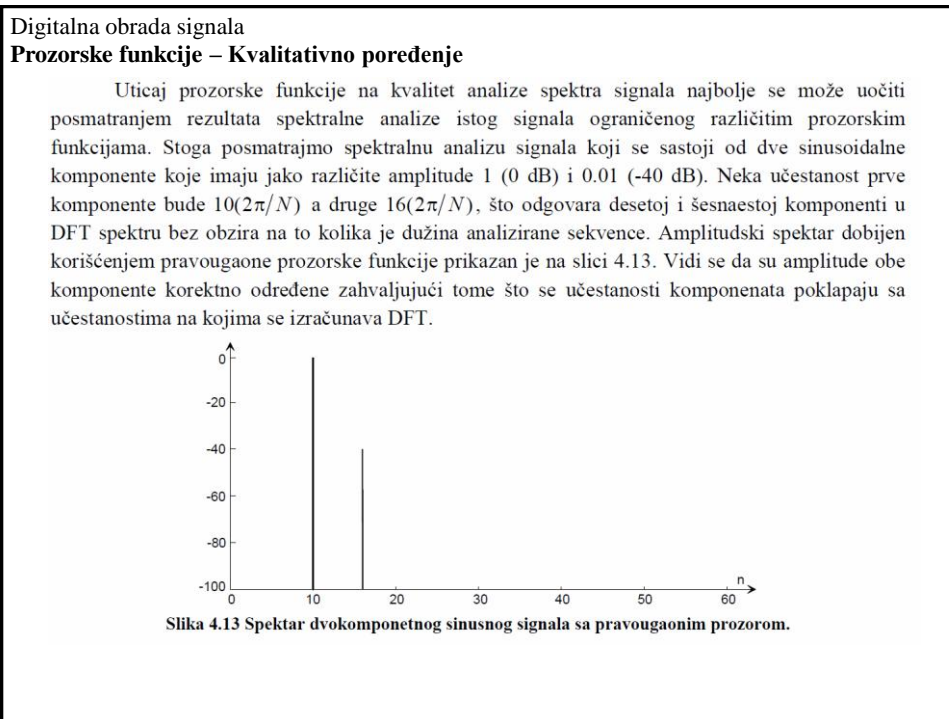
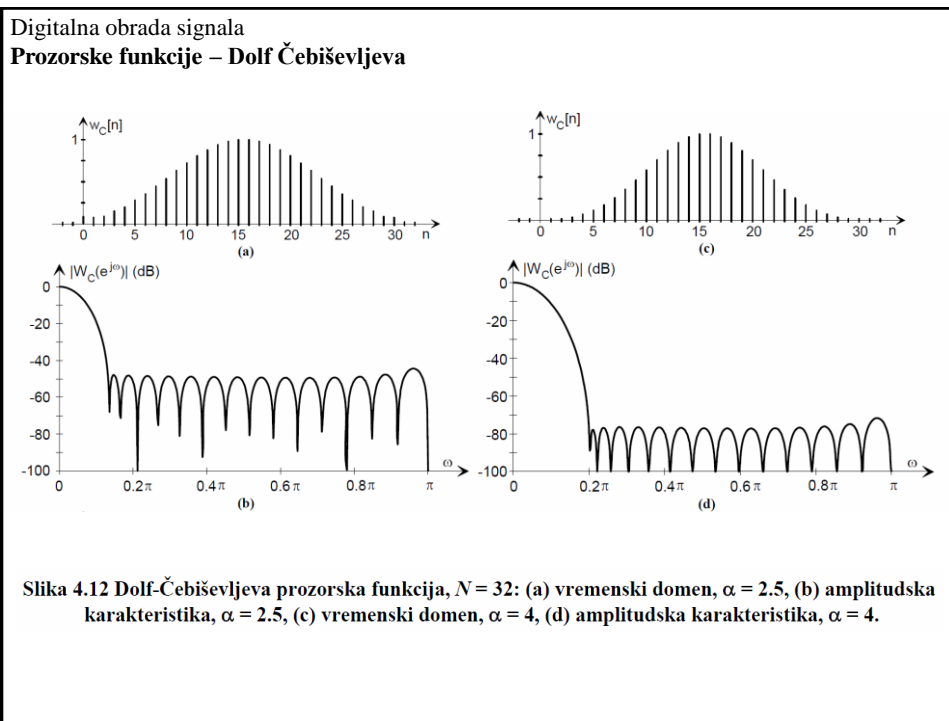
Odbirci spektra *Dolf-Čebiševljeve* (Dolph-Chebyshev) *prozorske funkcije* dati su izrazom:

$$W_D[k] = (-1)^k \frac{\cos\{N \cos^{-1}[\beta \cos(\pi k/N)]\}}{\cosh[N \cosh^{-1}(\beta)]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

gde je:

$$\beta = \cosh\left[\frac{1}{N} \cosh^{-1}(10^\alpha)\right]$$

a α predstavlja logaritam odnosa amplitude centralnog luka i amplituda jednakih bočnih lukova. Odbirci Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije u vremenskom domenu, $w_D[n]$, se dobijaju primenom inverzne DFT na odbirke $W_D[k]$



Digitalna obrada signala
Prozorske funkcije – Kvalitativno poređenje

Neka se zatim učestanost prve komponente promeni na $10.5(2\pi/N)$ što predstavlja najgori slučaj za curenje spektra jer učestanost signala leži na sredini između dve učestanosti na kojima se izračunava DFT. Ako se dužina sekvence ograniči pravougaonim prozorom primenom DFT se dobija rezultat prikazan na slici 4.14a. Zbog curenja spektra pojavljuju se frekvencijske komponente kojih nema u ulaznom signalu, a komponenta manje amplitude je maskirana curenjem spektra komponente signala sa većom amplitudom. To se moglo i očekivati s obzirom da se iz spektra pravougaone prozorske funkcije (4.48) dobija da je na učestanosti $5.5(2\pi/N)$ slabljenje svega 25 dB, što znači da signal koji je slabiji za 40 dB ne može biti detektovan. Ako se za ograničenje sekvence primeni trougaona prozorska funkcija curenje spektra se smanjuje ali ne dovoljno da bi se detektovao signal manje amplitude.

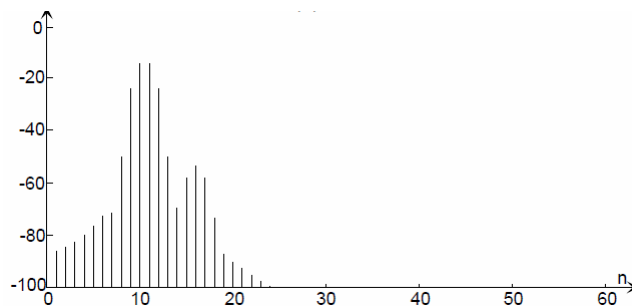
Digitalna obrada signala
Prozorske funkcije – Kvalitativno poređenje

Hanova prozorska funkcija još više smanjuje curenje spektra tako da se u amplitudskom spektru primećuje postojanje manje komponente signala što je prikazano na slici 4.14b. Ipak, zbog nedovoljnog potiskivanja curenja spektra, minimum u amplitudskom spektru između dva maksimuma je svega 3 dB manji od amplitude manje komponente. Zbog toga je u prisustvu šuma otežana detekcija slabijeg signala. Nešto bolji rezultati dobijaju se primenom Hemingove prozorske funkcije ali se sa slike 4.14c vidi da je zbog curenja spektra amplituda slabije komponente povećana i iznosi oko -35 dB.

Digitalna obrada signala

Prozorske funkcije – Kvalitativno poređenje

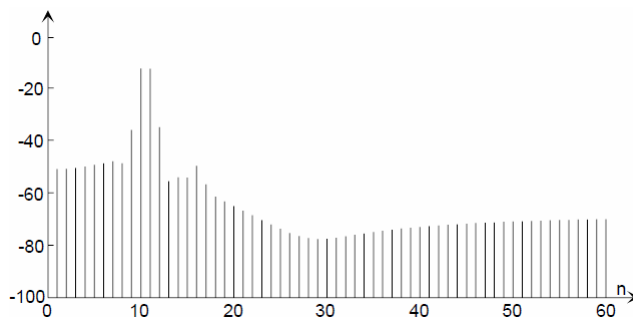
Primenom Blekmanove prozorske funkcije dobijaju se značajno bolji rezultati što se vidi sa slike 4.14d. Minimum između dva maksimuma je manji za oko 17 dB od amplitude slabije komponente što obezbeđuje pouzdanu detekciju obe komponente signala.

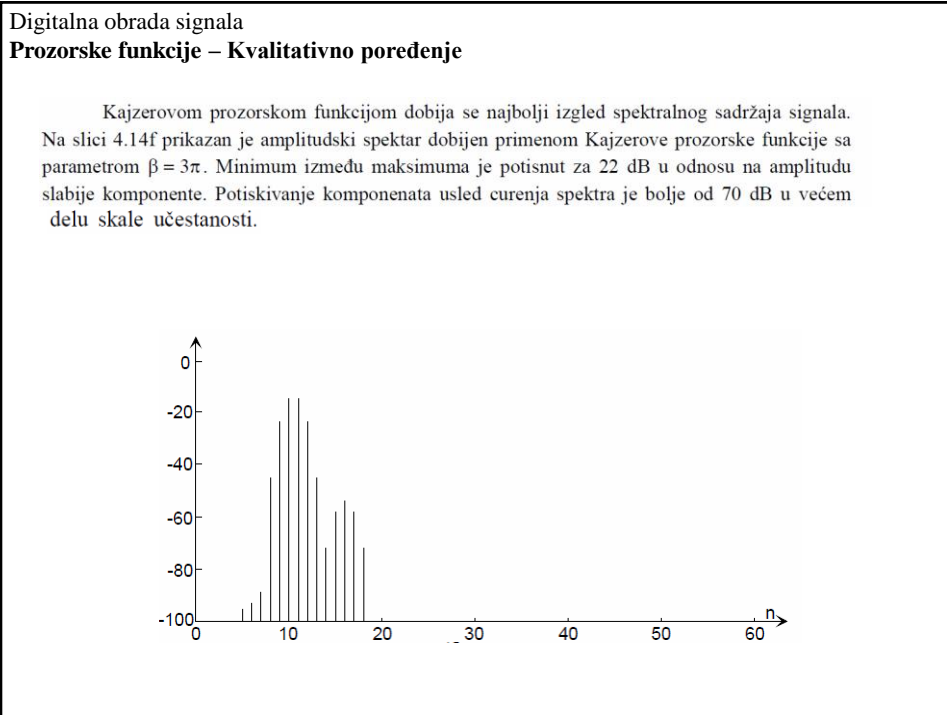


Digitalna obrada signala

Prozorske funkcije – Kvalitativno poređenje

Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija daje takođe odlične rezultate koji su prikazani na slici 4.14e za vrednost parametra $\alpha = 2$. Nedostatak ove prozorske funkcije je konstantan nivo spektralnog curenja koji, iako je mali, može smetati u nekim primenama.





Digitalna obrada signala
Prozorske funkcije – Kvantitativno poređenje

Prozor	Bočni lukovi	Opadanje lukova	Koherentno pojačanje	ENBW	BW (-3 dB)	Scalloping slabljenje	Korelacija (75%)
Pravougaoni	- 13	- 6	1.00	1.00	0.89	3.92	75.0
Trougaoni	- 27	- 12	0.50	1.33	1.28	1.82	71.9
$\sin(x)$	- 23	- 12	0.64	1.23	1.20	2.10	75.5
Hanov	- 32	- 18	0.50	1.50	1.44	1.42	65.9
Hemingov	- 43	- 6	0.54	1.36	1.30	1.78	70.7
Blekmanov	- 58	- 18	0.42	1.73	1.68	1.1	56.7
Blekman-Haris (3 člana)	- 61	- 6	0.45	1.61	1.56	1.27	61.0
Blekman-Haris (3 člana)	- 67	- 6	0.42	1.71	1.66	1.13	57.2
Blekman-Haris (4 člana)	- 74	- 6	0.40	1.79	1.74	1.03	53.9
Blekman-Haris (4 člana)	- 92	- 6	0.36	2.00	1.90	0.83	46.0
Kajzerov ($\beta = 2\pi$)	- 46	- 6	0.49	1.50	1.43	1.46	65.7
Kajzerov ($\beta = 3.5\pi$)	- 82	- 6	0.37	1.93	1.83	0.89	48.8
Dolf-Čebišev ($\alpha = 2.5$)	- 50	0	0.53	1.39	1.33	1.70	69.6
Dolf-Čebišev ($\alpha = 4$)	- 80	0	0.42	1.73	1.65	1.10	55.9